ピカール群に対するp進指数写像について (Algebraic Number Theory and Related Topics 2013)

AUTHOR(S):

甲斐, 亘

CITATION:

甲斐, 亘. ピカール群に対するp進指数写像について (Algebraic Number Theory and Related Topics 2013). 数理解析研究所講究録別冊 2015, B53: 87-94

ISSUE DATE:

2015-09

URL:

http://hdl.handle.net/2433/241276

RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B53 (2015), 87–94

ピカール群に対する p 進指数写像について
(On the p-adic exponential map for the Picard group)

By

甲斐 亘 (Wataru Kai)*

Abstract

This is an announcement of results by the author[2], which will be submitted elsewhere. We sketch how a p-adic exponential map for the Picard group is defined for schemes proper and flat over the integer ring of a complete discrete valuation field of characteristic 0. The main ingredients are formal geometry and a property of coherent cohomology called the exchange property. An application to the Albanese map is included.

§1. 背景

本稿では, 筆者の研究 [2] に基づいて, 標数 0 の完備離散付値体の整数環上固有かつ平坦なスキームに対して定義される, ピカール群に対する指数写像について解説する. ここでスキーム X のピカール群 $\mathrm{Pic}(X)$ とは X 上の直線束の同型類のなす集合にテンソル積により群構造を入れたものである.

ピカール群に対する指数写像は $\mathbb{C}$ 上の解析的理論ではよく知られている. すなわち, X がコンパクト複素多様体のとき, 層の準同型 $\mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^*$ から導かれる写像

$$\exp : H^1(X, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{Pic}(X)$$

が位相アーベル群の局所同型になっている. ここで $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ には有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間としての通常の位相が入っており, $\mathrm{Pic}(X)$ の位相は, 同語反復的になってしまうが, 上の写像が局所同相になるように入れるというのが一つの定義である.

p 進体などの非アルキメデス完備体上固有なスキーム X に対しては, X がスムーズである場合など一定の条件を満たす場合にはピカール多様体の良い理論が存在し, それを

Received March 27, 2014. Revised November 30, 2014.
2010 Mathematics Subject Classification(s): Primary 14C22; Secondary 11G25.
Key Words: *Picard group, exponential/logarithmic map, Albanese map.*
Supported by the Program for Leading Graduate Schools, MEXT, Japan
*Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo. 3-8-1 Komaba Meguro-ku Tokyo 153-8914, Japan.
e-mail: `kaiw@ms.u-tokyo.ac.jp`

利用して類似の指数写像が構成できる．この場合, ピカール群に対する指数写像は有限次元ベクトル空間 $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ の開部分群から $\mathrm{Pic}(X)$ への単射群準同型となる．しかし $\mathbb{C}$ 上の構成を非アルキメデスの状況でそのまま適用することはできない．これは主に指数級数の収束半径が有限であるためである．

本稿では, 非アルキメデスの状況でピカール群に対する指数写像をピカール多様体の存在如何に拘らず通用し $\mathbb{C}$ 上の世界との類似がよりはっきりと見える方法で構成する方法を紹介する．

主結果を述べるために状況を設定しよう．k を標数 $(0,p)$ の完備離散付値体とする (p は 0 または素数)．その整数環を $\mathcal{O}_k$ とする．$\pi\in k$ を一つの素元とする．v_k を k の正規付値とし整数 e を $e=v_k(p)$ と定める．ただし $p=0$ のときは $e=0$ とする．

$f:\mathcal{X}\to\mathrm{Spec}\mathcal{O}_k$ を $\mathcal{O}_k$ 上平坦かつ固有なスキームとする． 整数 $n\geq 1$ に対し $\mathcal{X}_n=\mathcal{X}\otimes\mathcal{O}_k/(\pi^n)$ と定める．またスキームの圏上のアーベル群関手 $G=H^1(-,\mathcal{O}_-)$ または $G=\mathrm{Pic}(-)$ に対して $G(\mathcal{X})^{(n)}=\ker[G(\mathcal{X})\to G(\mathcal{X}_n)]$ と定める．

定理 1.1. 上に述べた状況で, 整数 m を

$$\pi^m\mathcal{O}_k=\mathrm{Ann}[H^0(R\mathrm{Hom}(Rf_*\mathcal{O}_\mathcal{X},\mathcal{O}_k))_{\mathrm{tors}}]$$

で定めるとき, 整数 n が $m+\frac{e}{p-1}$ よりも大きければ, 標準的なアーベル群の同型写像

$$\exp: H^1(\mathcal{X},\mathcal{O}_\mathcal{X})^{(n)}\to\mathrm{Pic}(\mathcal{X})^{(n)}$$

が存在する．

注意 1. 両辺は減少フィルトレーション $(-)^{(\nu)}$ $(\nu\geq n)$ により位相群となり, 左辺の位相は通常の π 進位相と一致する．定理は十分大きな任意の n に対して成立するので写像 exp は位相群の同型となっている．

注意 2. $X=\mathcal{X}\otimes k$ と記す．$n>m$ が成立していることから

$$H^1(\mathcal{X},\mathcal{O}_\mathcal{X})^{(n)}\to H^1(X,\mathcal{O}_X)$$

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{X})^{(n)}\to\mathrm{Pic}(X)$$

が単射であることが示せる．したがって定理の exp は, 「収束半径の内側で定義された $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ から $\mathrm{Pic}(X)$ への指数写像」と見なせる．なお一つ目の単射は両辺の通常の π 進位相について開埋め込みになっている．

§2. 指数写像の構成

本節では定理 1.1 の証明の概略を述べる．詳細は [2, §1] を参照されたい．出発点は $n>\frac{e}{p-1}$ のときに存在する次の図式である．ここで $\mathfrak{X}$ は $\mathcal{X}$ の $\mathcal{X}_1$ に沿った形式的完備化

である.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \pi^n\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} & \to \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}_n} \to 0 \\ & \exp \downarrow\uparrow \log & \\ 1 \to & 1+\pi^n\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} & \to \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}^* \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}_n}^* \to 1 \end{array}$$

ここで射 "exp" は, 切断 $\pi^n a \in \pi^n\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ が与えられたら, 無限級数 $\exp(\pi^n T) = \sum_{i\geq 0} \dfrac{(\pi^n T)^i}{i!}$ に $T=a$ を代入した値を返すという射である. 逆向きの射 "log" も同様である. exp と log は互いに逆射である. コホモロジーを取ることにより次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \to H^0(\mathcal{X}_n,\mathcal{O}_{\mathcal{X}_n}) & \xrightarrow{\partial_{\mathrm{add}}} & H^1(\mathfrak{X},\pi^n\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) & \longrightarrow H^1(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}})^{(n)} \to 0 \\ & & \wr\|(*) & \\ H^0(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^*) \to H^0(\mathcal{X}_n,\mathcal{O}_{\mathcal{X}_n}^*) & \xrightarrow{\partial_{\mathrm{mult}}} & H^1(\mathfrak{X},1+\pi^n\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) & \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{X})^{(n)} \to 0 \end{array}$$

ここで形式幾何の基本結果 [1, (5.1.2), (5.1.6)] から従う同型 $H^1(\mathfrak{X},\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})^{(n)} \cong H^1(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}})^{(n)}$ と $\mathrm{Pic}(\mathfrak{X})^{(n)} \cong \mathrm{Pic}(\mathcal{X})^{(n)}$ を用いた. かくして定理は次の主張から従う. なお, 補題 2.1 と補題 2.2 に現れる m は定理 1.1 と同じとする.

補題 2.1. $n-m > \frac{e}{p-1}$ ならば, 同型 $(*)$ のもと, ∂_{add} と ∂_{mult} の像は一致する.

これを証明するには, 補題 2.1 の仮定のもと存在する可換図式

$$\begin{array}{ccccc} H^0(\mathcal{X}_n,\pi^{n-m}\mathcal{O}_{\mathcal{X}_n}) & \xrightarrow{r_1} \mathrm{cok}[H^0(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \to H^0(\mathcal{X}_n,\mathcal{O}_{\mathcal{X}_n})] & \xrightarrow{\partial_{\mathrm{add}}} & H^1(\mathfrak{X},\pi^n\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \\ \wr\| & & & \wr\|(*) \\ H^0(\mathcal{X}_n,1+\pi^{n-m}\mathcal{O}_{\mathcal{X}_n}) & \xrightarrow{r_2} \mathrm{cok}[H^0(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^*) \to H^0(\mathcal{X}_n,\mathcal{O}_{\mathcal{X}_n}^*)] & \xrightarrow{\partial_{\mathrm{mult}}} & H^1(\mathfrak{X},1+\pi^n\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \end{array}$$

を用いる. ここで r_1 と r_2 は層の包含射から誘導される写像, 左側の縦の同型写像は指数級数と対数級数が引き起こすものである. 補題 2.1 はこの可換図式と次の主張から従う.

補題 2.2. $n > m$ のもと, 二つの写像 r_1, r_2 はともに全射である.

この主張は交換性質 [1, (7.7.6)] と呼ばれる連接コホモロジーの性質を用いて示される (整数 m の一見複雑な定義はここに由来する). これで定理が証明できた.

指数写像の構成が関手性を持つため, 次を導くことができる. これは前節の注意 2 の観点を正当化する.

系 2.3. X を k 上固有なスキーム, $\mathcal{X},\mathcal{X}'$ を整数環上平坦固有な二つのモデルとする. 整数 n, n' を, スキーム $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}'$ に対して定理 1.1 の条件を満たすようなものとする. このとき $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ の二つの開部分加群 $H^1(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}})^{(n)}$, $H^1(\mathcal{X}',\mathcal{O}_{\mathcal{X}'})^{(n')}$ 上に指数写像がそれぞれ定まるが, 両者はある開部分加群上で一致する.

§3. Mattuck の結果との比較

次の古典的な結果を思い出そう.

定理 3.1 (Mattuck [4, Theorem 7]). k を標数 0 の完備付値体, A を k 上のアーベル多様体とする. g をその次元とする. このとき, 位相群 $A(k)$ は $\mathcal{O}_k^g$ に同型な開部分群を含む.

ここで $A(k)$ は k の付値位相から受け継いだ位相により位相群と見ている. 定理は A が k 有理点を持つ完備非特異曲線 X のヤコビ多様体 J である場合に帰着して証明される. ここで完備非特異曲線 X のヤコビ多様体 J とは X により定まる k 上のアーベル多様体であって, その有理点の群 $J(k)$ は X のピカール群の次数 0 部分 $\mathrm{Pic}^0(X)$ を部分群として含み, X が k 有理点を持つ場合には $J(k) = \mathrm{Pic}^0(X)$ が成り立つ.

定理 3.1 の A が k 有理点を持つ完備非特異曲線 X のヤコビ多様体である場合の Mattuck による証明 [4, pp.109–113] は下の 3 ステップに分けることができる.

(1) 「一般の位置の」k 有理点 $x_1, \ldots, x_g \in X(k)$ を基点に取ることにより定まる射

$$X^g \to J$$

を考え, これが $(x_1, \ldots, x_g) \in X^g(k)$ の近傍と $0 \in J(k)$ の近傍の同相写像を引き起こしていることを示す（微分幾何学における逆写像定理の k 上の類似を使う）.

更に x_i の局所パラメターを取ることにより x_i の近傍を $\mathcal{O}_k$ でパラメター付けする. これにより $0 \in J(k)$ の近傍が $\mathcal{O}_k^g$ でパラメター付けされる:

$$\mathcal{O}_k^g \xrightarrow{\sigma} J(k)$$

σ は位相空間の開埋め込みである. （記号の煩雑さを避けるため, $\mathcal{O}_k^g$ は, このあと原点の近傍で取り替えても $\mathcal{O}_k^g$ と記すことにしよう. ）

(2) 次に, $\mathbb{C}$ 上のアーベル・ヤコビ写像に倣って X 上の g 個の一次独立な一次正則微分形式 $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ を取り, 対応 $(t_1, \ldots, t_g) \mapsto (\sum_{j=1}^g \int_0^{t_j} \alpha_i)_{1 \le i \le g}$ によって原点の近傍同士の同相

$$\mathcal{O}_k^g \xrightarrow[\cong]{\tau} \mathcal{O}_k^g$$

を定める. ただし $\int_0^{t_j}$ は x_j の局所パラメターについて 0 に対応する点から t_j に対応する点まで積分するという意味である. かくして次の図式ができる.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}_k^g & \\ \swarrow_{\tau} & & \searrow^{\sigma} \\ \mathcal{O}_k^g & & J(k) \end{array}$$

(3) 最後に $\sigma \circ \tau^{-1}$ が群準同型となることを, $\mathbb{Q}$ 上の有限生成体へ, 次いで $\mathbb{C}$ への帰着によって示す. 元々アーベル・ヤコビ写像に倣って作った写像であったので, 準同型性は $\mathbb{C}$ 上のアーベル・ヤコビの定理から従う.

一方, 定理 3.1 のヤコビ多様体の場合は (**離散**付値の場合に限るが) 前節の exp を用いて以下のように証明することもできる (詳細は [2, §2] を参照). この証明には完備非特異曲線 X が k 有理点を持つことを仮定する必要が無いという長所がある.

曲線 X の整数環 $\mathcal{O}_k$ 上固有かつ平坦な任意のモデル $\mathcal{X}$ を取る. すると, 主定理 1.1 と注意 2 から, まず $\mathcal{O}_k^g$ に同型な位相群 V と群の埋め込み

$$V \xrightarrow{\exp} J(k)$$

が存在する. $J(k)$ の付値から来る位相と部分群の族 $(\mathrm{Pic}(\mathcal{X})^{(\nu)})_{\nu\geq 1}$ から来る位相が同一であるかどうかアプリオリには分からないため, 直ちに像が開集合であるとは結論できない. そこでパラメター付け σ を用いる. 今は (1) と異なり X に k 有理点が存在することを仮定していないが, (1) の σ に相当するものがモデルのコホモロジー群から得られるデータを用いて構成できる. このパラメター付け σ の構成のためにはモデルをある程度良く取っておく必要がある. σ の構成は下で少し詳しく述べる.

(3.1)
$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}_k^g & \\ & & \searrow^{\sigma} \\ V & \xrightarrow{\exp} & J(k) \end{array}$$

この図式で 0 の近傍で $\sigma^{-1}\circ\exp$ が局所同相であることを確かめれば, exp の像が開集合であることが結論できる. そしてこれが, exp と σ の構成をたどることにより実際に確かめられる. このような議論の結果として $J(k)$ に入る二通りの位相が同一であることも分かる.

パラメター付け σ の構成を述べよう. σ は体拡大 k'/k という付加データを与えた上で次のような性質を持つように構成される.

定理 3.2.　k を標数 0 の完備離散付値体とする. X を k 上の完備非特異曲線とし, その種数を g とする. X のヤコビ多様体を J とする. k の有限次拡大 k' で剰余体が k' に同型な X の閉点が存在するようなものを一つ固定する. このとき十分大きな整数 N に対して X の閉点の族

$$(x_i^{(t)})_{1\leq i\leq g,\ t\in\pi^N\mathcal{O}_k}$$

で各 $x_i^{(t)}$ の剰余体はすべて k' に同型かつ, 写像

$$\begin{aligned} \sigma:\ \pi^N\mathcal{O}_k^g\ &\longrightarrow J(k) \\ (t_i)_{1\leq i\leq g} &\longmapsto \textstyle\sum_i[\mathcal{O}_X(x_i^{(t_i)}-x_i^{(0)})] \end{aligned}$$

が位相空間の開埋め込みとなっているものが存在する.

σ の構成の概略を述べる. k' の完備性から, 剰余体が k' に同型な X の閉点は無限個存在する. この中から「一般の位置」にある相異なる閉点 $x_1,\ldots,x_g$ を取る (正確には「$\mathcal{O}_X(x_i)_{x_i}/\mathcal{O}_{X,x_i}$ の各々から適当な元 a_i を一つずつ選ぶと k ベクトル空間

$$\mathrm{cok}[H^0(X,\mathcal{O}_X(x_1+\cdots+x_g))\to\bigoplus_{i=1}^g\mathcal{O}_X(x_i)_{x_i}/\mathcal{O}_{X,x_i}]$$

への $a_1,\ldots,a_g$ の像が一次独立になる」 という条件を満たすような $x_1,\ldots,x_g$ を取る. $k'=k$ と取っている場合にはこの条件は $H^0(X,\mathcal{O}_X(x_1+\cdots+x_g))=k$ という条件と同値である).

さて X の整数環上の固有平坦なモデル $\mathcal{X}$ で正則なものを取る (2 次元なので可能). y_i をこのモデルに関する x_i の還元とする. これは $\mathcal{X}$ の閉点である. $\mathcal{X}$ を適当な y_i で有限回ブローアップすることで, $y_i(1\leq i\leq g)$ は相異なるとしてよい.

定理の主張に現れる閉点 $x_i^{(t)}$ は還元 y_i が変化しない範囲で各 $x_i=x_i^{(0)}$ をパラメータ $t\in\pi^N\mathcal{O}_k$ に沿ってずらしたものとして定義する. ずらす方向は先ほどの a_i の選択により定まる. t が十分 0 に近ければ $x_i^{(t)}$ の剰余体が k' に同型であることが Newton 近似により分かる.

§4. アルバネーゼ写像への応用

引き続き k を標数 0 の完備離散付値体とする. 前節の結果から導かれるアルバネーゼ写像に関する結果を述べるためにアルバネーゼ写像の定義を思い出しておこう.

X を体 K 上幾何的に整なスキームとする. このとき X に対して X のアルバネーゼ多様体と呼ばれる K 上のアーベル多様体 $\mathrm{Alb}(X)$ と対角スキーム $\Delta_X\subset X\times X$ 上単位元への定数射であるような射

$$f:X\times X\to\mathrm{Alb}(X)$$

が定まって次の普遍性を満たす: K 上のアーベル多様体 A と対角スキーム上単位元への定数射であるような射 $\varphi:X\times X\to A$ が与えられたとき, アーベル多様体の準同型 $g:\mathrm{Alb}(X)\to A$ で $\varphi=g\circ f$ を満たすものが一意に存在する [3, pp.45–46].

もしも X が K 有理点を持てば, 射 φ は或る $\varphi':X\to A$ を用いて $\varphi(x,y)=\varphi'(x)-\varphi'(y)$ の形に書かれるので, アルバネーセ多様体の定義は広く知られた代数閉体上の定義と同じ形になる.

X が非特異完備曲線の場合は $\mathrm{Alb}(X)$ は X のヤコビ多様体に一致する. K が標数 0 で, X がスムーズかつ固有ならば $\mathrm{Alb}(X)$ の次元はベクトル空間 $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ の次元に等しい.

$Z_0(X)^0$ を X 上の次数 0 のゼロサイクルの群とする. このとき写像

$$\mathrm{alb}_X:Z_0(X)^0\to\mathrm{Alb}(X)(K)$$

が定義される. ここでは K が完全体の場合の定義を説明しよう. まず, サイクル $\alpha=\sum_i n_i[x_i]$ が K 有理点の和で書かれているときは, f を引き起こす射 $f':X\to\mathrm{Alb}(X)$ を用いて $\mathrm{alb}_X(\alpha)=\sum_i n_if'(x_i)$ と定義される (f' の取り方に依らないことが分かる). 一般のゼロサイクルに対しては, 適当に体拡大して上のように定義すると, 像はガロア群の作用で不変であることが確かめられるので $\mathrm{Alb}(X)(K)$ に入る.

定理 4.1. k を標数 0 の完備離散付値体とする．X を k 上スムーズで射影的かつ幾何的に整なスキームとする．$g = \dim(\mathrm{Alb}(X))$ とおく．k の有限次拡大 k' で剰余体が k' に同型な X の閉点が存在するようなものを一つ固定する．このとき十分大きな整数 N に対して X の閉点の族

$$(x_i^{(t)})_{1\leq i\leq g,\ t\in\pi^N\mathcal{O}_k}$$

で各 $x_i^{(t)}$ の剰余体はすべて k' に同型かつ, 写像

$$\begin{aligned}\sigma : \pi^N\mathcal{O}_k^g &\longrightarrow \mathrm{Alb}(X)(k)\\ (t_i)_{i\in I} &\longmapsto \textstyle\sum_i \mathrm{alb}_X(x_i^{(t_i)} - x_i^{(0)})\end{aligned}$$

が位相空間の開埋め込みとなっているものが存在する．

証明は, Bertini の定理を使って X が 1 次元の場合に帰着する．1 次元の場合は定理 3.2 で示されている．

定理の系として, $\mathrm{Alb}(X)(k)$ の或る開部分群が剰余体が k' に同型な閉点で書かれるゼロサイクルの像だけで覆われていることが従う．さらに, もしも k が p 進体であればコンパクト性によりある有限次拡大体 k'' があって k'' よりも小さな剰余体を持つような閉点で書かれるゼロサイクルだけでアルバネーゼ写像の像が覆われていることが結論できる．実際は, 今述べた系で本質的であった 1 次元の場合はトレースの議論によって前節の Mattuck の結果からも示すことができる．とはいえこれは従来注意されていなかった事実のようである．

体上のスキームだけでなく整数環上のモデルを扱う我々の方法が優れているのは例えば上の証明の系として次の主張を導くことができる点である．

系 4.2. 定理の状況でもし X が半安定還元を持てば, 定理の閉点の族

$$x_i^{(t)} \quad (1\leq i\leq g,\ t\in\pi^N\mathcal{O}_k)$$

(N は十分大きな整数) と X の半安定モデル $\mathcal{X}$ を被約な閉部分スキーム $\overline{\{x_i^{(t)}\}} \subset \mathcal{X}$ と $\mathcal{X}$ の閉ファイバーがすべての (i,t) に対して横断的に交わるように取れる．

$\mathcal{X}$ の取り方は, 任意の半安定モデルを取ったあと, それを閉点で有限回ブローアップしたものとなる．証明は, 超曲面切断やブローアップが還元に及ぼす影響に注意しながら定理の証明の手続きをなぞることで為される．離散付値環上のスキームの超曲面切断やブローアップに関する幾何学は Jannsen・斎藤両氏により整備されている [5, Appendix].

謝辞

日頃ご指導を賜っている斎藤秀司先生と, 今回講演の機会を下さり本稿の草稿に対して有益な指摘を下さった落合理先生を始めとする編集委員の先生方と査読者の方に深く感謝いたします．そして発表前日に心の準備を手伝って下さった学友の宮崎弘安君にも感謝申し上げます．

References

[1] Grothendieck, A. with Dieudonné, J., Éléments de géométrie algébrique. III, *Publ. Math. IHÉS*, **11**, **17**(1961, 1963).

[2] Kai, W., A p-adic exponential map for the Picard group and its application to the Albanese map, *arXiv:1309.6186 [math.AG]*, to be submitted in a revised form.

[3] Lang, S., Abelian Varieties, *Interscience tracts in pure and applied mathematics*, **7**, Interscience Publishers, Inc., 1959.

[4] Mattuck, A., Abelian varieties over p-adic ground fields, *Ann. of Math.*, **62**(1955), 92–119.

[5] Saito, S. and Sato, K. with an appendix by Jannsen, U., A finite theorem for zero-cycles over p-adic fields, *Ann. of Math.*, **172**(2010), 593–639.